Internationales Studienkolleg der Hochschule Kaiserslautern

Semester: Wintersemester 2021/2022

FSP-Teilprüfung: Mathematik T2/TE

Datum: 30.11.2021

Dauer: 90 Minuten

Prüfer: Dr. Jens Siebel, Dr. Dirk Fesser, StD. Werner Müller, Jörg Wilhelm

Aufgabe 1 (Dr. Fesser)

Hinweis: Rechnen Sie, falls erforderlich, jeweils auf drei Nachkommastellen genau!

Gegeben ist die komplexe Zahl $z = \cos(45°) + i \cdot \sin(45°)$.

a) Zeichnen Sie z in die komplexe Zahlenebene ein *(2 Punkte)*.

b) Geben Sie die Exponentialdarstellung von z an *(2 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie den Betrag und das Argument von z *(2 Punkte)*.

d) Bestimmen Sie z^{2021}, und zeichnen Sie das Ergebnis in die komplexe Zahlenebene ein *(2 Punkte)*.

e) Bestimmen Sie alle Lösungen w der Gleichung $w^5 = z^{2021}$ *(2 Punkte)*.

Aufgabe 2 (Dr. Siebel)

Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem:

$$f^{(4)}(x) - f''(x) = e^x,\ f(0) = 1,\ f'(0) = \frac{7}{2},\ f''(0) = 1\ f'''(0) = \frac{5}{2}$$ *(10 Punkte)*.

Aufgabe 3 (Dr. Siebel)

Kreuzen Sie jeweils das Feld ☐ mit der einzigen richtigen Alternative an *(10 Punkte)*.

richtige Antwort: 1 Punkt falsche bzw. fehlende Antwort: 0 Punkte

a)	$z = 1 - i \quad \Leftrightarrow$			
	$\overline{z}^2 = -2 \cdot i$ ☐	$\overline{z}^2 = 2 \cdot i$ ☐	$\overline{z}^4 = 4$ ☐	$\overline{z} = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot 315°}$ ☐
b)	$\int_{-a}^{a} a \cdot x dx = a$ für			
	$a = 0$ ☐	alle $a \in \mathbb{R}$ ☐	$a = 1$ ☐	$a = -\sqrt{2}$ ☐
c)	$\vec{a} = \begin{pmatrix} c \\ -e^0 \end{pmatrix}$ hat den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} c \\ \left\lvert -\sqrt{0,5} + \sqrt{0,5} \cdot i \right\rvert \end{pmatrix}$ für			
	$c = 0$ ☐	$c = -1 \vee c = 1$ ☐	$c = -\sqrt{2} \vee c = \sqrt{2}$ ☐	kein $c \in \mathbb{R}$ ☐

d)	Für welche DGL ist $f(x)=c_1\cdot e^x+c_2\cdot e^{i\cdot x}+c_3\cdot e^{-i\cdot x}$ die allgemeine Lösung?			
	$f'''(x)+f''(x)$ $-f'(x)+f(x)=0$ ☐	$f'''(x)-f''(x)$ $+f'(x)-f(x)=e^x$ ☐	$f'''(x)-f''(x)+f'(x$ $-f(x)=\cos(x)$ ☐	$f'''(x)-f''(x)$ $+f'(x)-f(x)=0$ ☐
e)	$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -6 & 15\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}$. Was kann man hier berechnen?			
	$A\cdot B$ ☐	$A^T\cdot B$ ☐	$B\cdot A$ ☐	$B^T\cdot A$ ☐
f)	$f(x)=-\ln(x)+2\quad \mathbb{D}_f=]0;\infty[$ hat ein lokales Maximum an:			
	$x_{\max}=1$ ☐	$x_{\max}=\ln 2$ ☐	$x_{\max}=0,5$ ☐	keines ☐
g)	Die Stammfunktion von $f(x)=x\cdot e^x\quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ ist:			
	$x\cdot e^x+c$ ☐	$(x-1)\cdot e^x+c$ ☐	$(x+1)\cdot e^x+c$ ☐	$(1-x)\cdot e^x+c$ ☐
h)	Die Ebene $\varepsilon:\quad 2\cdot x-y+5\cdot z=8$ schneidet die y-Achse			
	an $y=-8$ ☐	an $y=8$ ☐	an $y=1/8$ ☐	gar nicht ☐
i)	Alle reellen Polstellen x_p von $f(x)=\tan(x)$ sind für $k\in\mathbb{Z}$:			
	$x_p=k\cdot\pi$ ☐	$x_p=2\cdot k\cdot\pi$ ☐	$x_p=(k+1/2)\cdot\pi$ ☐	keine ☐
j)	Welches LGS hat unendlich viele Lösungen?			
	$\left(\begin{array}{cc\|c}1 & e & 1/e\\ e & e^2 & 1\end{array}\right)$ ☐	$\left(\begin{array}{cc\|c}1 & e & 0\\ e & e^2 & 1\end{array}\right)$ ☐	$\left(\begin{array}{cc\|c}1 & e & 1\\ e & e^2 & 0\end{array}\right)$ ☐	$\left(\begin{array}{cc\|c}e & e^2 & 1/e\\ 1 & e & 1\end{array}\right)$ ☐

Aufgabe 4 (Wilhelm)

a) Bestimmen Sie $a\in\mathbb{R}$, so dass folgende Funktion an der Stelle $x_0=2$ stetig ist:

$$f(x)=\begin{cases}8\cdot a+16\cdot x & x<2\\ a^2\cdot(x+2) & x\geq 2\end{cases}\quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$$ *(3 Punkte).*

b) Ermitteln Sie sämtliche reellen und nicht-reellen Nullstellen von $f(x)=2\cdot x^4-8\cdot x^3+8\cdot x^2-8\cdot x+6\quad \mathbb{D}_f=\mathbb{C}$ *(3 Punkte).*

c) Bestimmen Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}_f\subset\mathbb{R}$ für die Funktion $f(x)=\ln(4+x)-\ln(4-x)$ *(1 Punkt).*

d) Bestimmen Sie jeweils $f'(x)$:

d1) $f(x)=2\cdot x^3\cdot\left[\sqrt{x}+\sin(x)\right]\quad \mathbb{D}_f=[0,\infty[$ *(1 Punkt),* d2) $f(x)=\dfrac{\ln(x)-x}{\cos(x)}$ $\mathbb{D}_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x>0\wedge x\neq\dfrac{2\cdot k+1}{2}\cdot\pi,\,k\in\mathbb{N}^0\right\}$ *(1 Punkt)*,

d3) $f(x)=\left(4\cdot e^{-5\cdot x^2}\right)^3$ $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ *(1 Punkt)*.

Aufgabe 5 (StD. Müller)

a) Stellen Sie eine Gerade $\mathcal{G}$ in Parameterdarstellung auf, die durch die beiden Punkte $A(3|1|2)$ und $B(5|3|4)$ geht *(1 Punkt)*.

b) Stellen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene ε auf, die durch die Punkte $C(2|3|-1)$, $D(4|1|1)$ und $E(1|2|-2)$ geht. Formen Sie die Ebene dann in die Koordinatenform um *(3 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von Gerade $\mathcal{G}$ und Ebene ε *(2 Punkte)*.

d) Bestimmen Sie die Werte m_z, so dass der Punkt $M(-6|3|m_z)$ von der Ebene ε den Abstand $d=\sqrt{32}\ LE$ hat *(3 Punkte)*.

e) Prüfen Sie, ob der Punkt $P(7|0|4)$ in der Ebene ε liegt *(1 Punkt)*.

Aufgabe 6 (StD. Müller, Wilhelm)

a) Ermitteln Sie für $f(x)=e^{x-1}+x^2$ $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ die Tangentengleichung an der Stelle $x_0=1$ *(3 Punkte)*.

b) Bestimmen Sie alle Wendepunkte von $f(x)=-\dfrac{1}{4}\cdot x^3+\dfrac{3}{2}\cdot x^2+1$ $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ *(3 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die komplett von den Funktionen $f(x)=\dfrac{1}{3}\cdot x^3-\dfrac{4}{3}\cdot x$ $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ und $g(x)=\dfrac{1}{3}\cdot x^2+\dfrac{2}{3}\cdot x$ $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ eingeschlossen wird, auf drei Nachkommastellen genau *(4 Punkte)*.